MAI 1 – řešení 5. domácího úkolu

Opět platí – moje řešení většinou nejsou jediná možná, máte občas jistě nápady lepší; a prosím, pokud najdete zde chybu, napište.

Začnu příkladem 2 – nepovinné řady si necháme na konec.

2. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$:

$$D_f = \left\{ x \in R;\ x \neq 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} \geqq 0 \right\} = (-\infty, -1\rangle \cup (2, +\infty)$$

neboť: $\dfrac{x+1}{x-2} \geqq 0$ když buď $(x+1 \geqq 0 \wedge x-2 > 0)$ ∨

∨ $(x+1 \leqq 0 \wedge x-2 < 0)$ ⟺

(„klasicky – řešení nerovnice)

⟺ $(x \geqq -1 \wedge x > 2) \vee (x \leq -1 \wedge x < -2)$ ⟺

$x \in (2, +\infty) \cup (-\infty, -1\rangle$

nebo – což můžete použít spojitost funkce $\dfrac{x+1}{x-2}$ pro $x \neq 2$ a větu o nabývání mezihodnot:

fce $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ může „měnit" znaménko jen v bodech, kde $g(x) = 0$ – tj. $x = -1$ a tam, kde není definována $x = 2$

$\frac{-}{-}$ $\frac{+}{-}$ $\frac{+}{+}$

(+) -1 (−) 2 (+)

" (má-li spojitá fce v intervalu (a, b) hodnoty $f(x_1) > 0$ a $f(x_2) < 0$ $(x_1, x_2 \in (a, b))$, pak mezi" body x_1 a x_2 „musí" být nulový bod, tj. „$\exists .\ c \in (a, b): f(c) = 0$)"

b) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; $\mathcal{D}(\ln x)=(0,+\infty)$ a tedy

$$\mathcal{D}f=\{x\in R;\ x>0 \wedge 4-\ln^2 x>0\} = (e^{-2}, e^{2})$$

$4-\ln^2 x>0 \Leftrightarrow \ln^2 x<4 \Leftrightarrow |\ln x|<2$, tj.

$-2<\ln x<2 \Leftrightarrow e^{-2}<x<e^{2}$ (neboť ln je rostoucí)

c) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $\mathcal{D}(\arcsin)=\langle -1,1\rangle$, a tedy

$$\mathcal{D}f=\left\{x\in R; -1\le \frac{2x}{1+x^2}\le 1\right\} = \left\{x\in R;\ \left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\le 1\right\} = R$$

a řešení nerovnice:

$\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\le 1 \Leftrightarrow |2x|\le 1+x^2$ – ale tato nerovnost platí pro $\forall x$

$\left((1\pm x)^2 = 1\pm 2x+x^2 \geqq 0\right)$

3, (i) $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ je rostoucí funkce v R :

$(0<)e^{x}$ je fce rostoucí, tedy pak $e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$ klesající v R, pak $-e^{-x}$ je fce v R rostoucí, součet dvou rostoucích fcí je rostoucí a jejich polovina „též".

„Důkazy" – jednoduché: např. 1) $x_1<x_2 \Rightarrow 0<e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}} > \dfrac{1}{e^{x_2}} \Rightarrow -\dfrac{1}{e^{x_1}} < -\dfrac{1}{e^{x_2}}$,

tj. $-e^{-x}$ je rostoucí fce: (*)

2) $x_1<x_2$: $e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{x_1}-e^{-x_1} < e^{x_2}-e^{-x_1} \overset{*}{<} e^{x_2}-e^{-x_2} \quad \left|\cdot \tfrac{1}{2}>0\right.$$

$$\frac{e^{x_1}-e^{-x_2}}{2} < \frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2} \quad \text{(cbd.)}$$

2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ je rostoucí v R, tedy prostá a má v R fci inverzní

(poznámka: f je ryze monotónní v $(a,b) \Rightarrow f$ je prostá v (a,b) je „vidět" ale lze i přesně „sepsat":
$x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$, pak (BÚNO): $x_1 < x_2$, f rostoucí $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – (tj. $f(x_1) \neq f(x_2)$) – cbd.)

a „vypočet" inverzní funkce:
(*) $f(x) = y \iff x = f^{\langle -1 \rangle}(y)$ –

(a zde při řešení rovnice (*) „dostaneme" i pro jaká „y" (*) má řešení, tj. i H_f, ale ukážeme si i „jinou cestu" k H_f)

tj. ? x tak, aby $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = y$: odtud

$$e^x - \frac{1}{e^x} - 2y = 0 \iff e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0 \;-$$

– tj. kvadratická rovnice pro $e^x = t$: $t^2 - 2ty - 1 = 0$, tj.

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1} \;\; (??),\; y \in R$$

? může „mít" jen jedno řešení – tak, díky tomu, že $t = e^x > 0$
je pro nás jen $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ $\quad (y - \sqrt{y^2+1} < 0, \forall y \in R)$
a tedy $\quad x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \quad y \in R$

a „výměna" $y \to x$ („jak je zvykem") dá:

$$f^{\langle -1 \rangle}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \; x \in R$$

<u>a poznámka k „nalezení" oboru hodnot fce $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$</u>

1) f je def. v R, spojitá v R $\Rightarrow$ (věta o nabývání mezihodnot) $H(f)$ je interval $(\subset R)$

2) $f(x)$ je rostoucí funkce, tedy $Hf = (\alpha, \beta)$,

kde $\alpha = \inf_{x \in R} f = \lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\beta = \sup_{x \in R} f = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

tj. $\alpha = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = „\dfrac{0 - \infty}{2}" = -\infty$

a $\beta = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = „\dfrac{\infty - 0}{2}" = \infty$

4. <u>náčrtky grafů funkcí:</u>

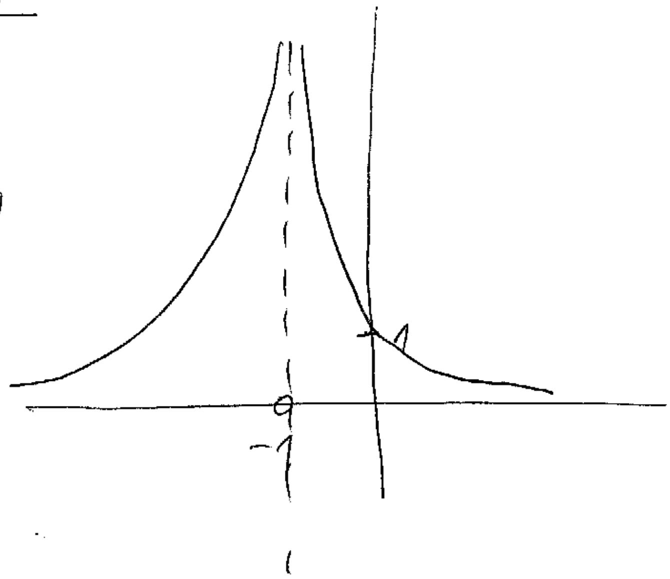
a) <u>$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\left(„z" \ \tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x^2}\right)$</u> $\rightarrow$

$(Df = R \setminus \{-1\}$, $f(x) > 0$ v Df,

a také: spojitá, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = „\dfrac{1}{+\infty}" = 0$,

$\lim_{x \to -1} f(x) = „\dfrac{1}{0^+}" = +\infty$

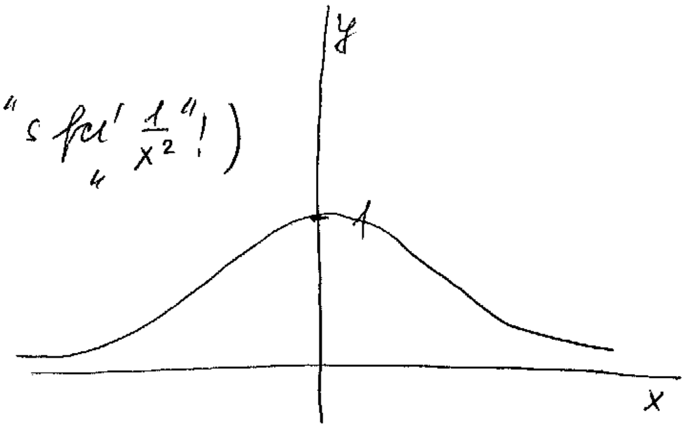
$f(0) = 1$



$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ – (není „podobná" s fcí „$\frac{1}{x^2}$"!)

g def. v $\mathbb{R}$, spojitá, $g(x)>0$ v $\mathbb{R}$,

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, sudá, $f(0)=1$



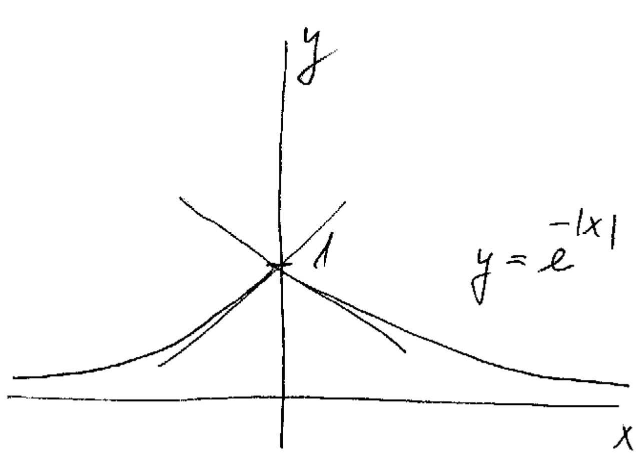
(a teď „už" víme, že graf nebude „mít špičku",
neboť ex. $g'(x)\in\mathbb{R}$ v D_f, tj. g je funkce „hladká" v $\mathbb{R}$
(má v každém bodě grafu tečnu)

b) $h(x)=e^{-|x|}$: („porovnej" – graf fce e^{x})

h – def. v $\mathbb{R}$, fce sudá, (tj. „stačí" graf pro $x\geq 0$) – v $\langle 0,+\infty)$ $h(x)=e^{-x}$,
tj. $h(x)\leq 1$ a klesá, tedy pak
$h(x)$ roste v $(-\infty,0\rangle$
ale zde je „špička" v bodě $[0,1]$
grafu: $h'_+(0) = \left(e^{-x}\right)'_{x=0+} = \left(e^{-x}\right)'_{x=0}$

$= -e^{-x}\Big|_{x=0} = -1$

a $h'_-(0) = \left(e^{-(-x)}\right)'_{x=0-} = \left(e^{x}\right)'_{x=0-} = 1$



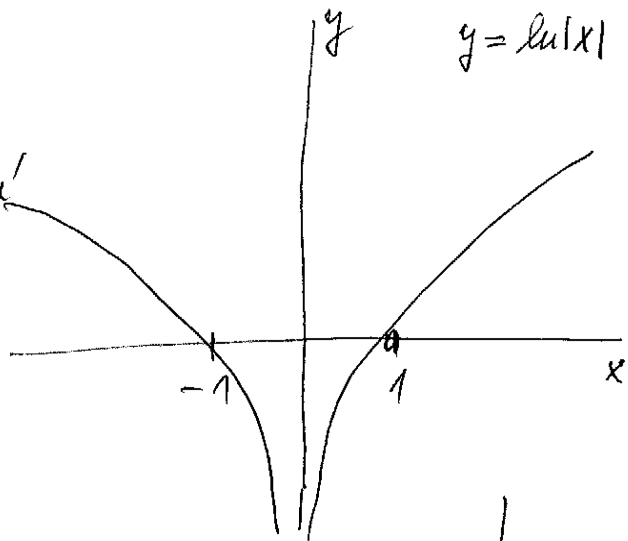
(teď už víme – jen jako poznámka
ke čtení dál po přednášce 7 –
– když už byly „derivace fcí" – na grafu jsou naznačeny
i „polotečny" grafu v $x=0$)

c) $k(x) = |\ln|x||$: („povinné" – graf fce $\ln x$ + | |)

(i) $\tilde{k}(x) = \ln|x|$ –

$D_f = R \setminus \{0\}$, fce sudá,

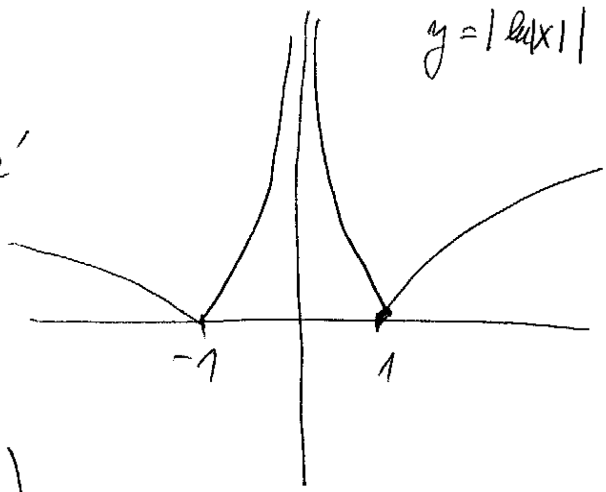
rostoucí v $(0,+\infty)$ ⟹ klesající v $(-\infty,0)$;



⇓

(ii) $k(x) = |\ln|x||$ –

– opět – již umíme nejen z grafu (a obrázku) odůvodnit, že $k(x)$ nemá derivace oboustranné v bodech $x = \pm 1$, neboť:



$x = 1$: $k'_+(1) = 1$ $\left(= (\ln x)'\big|_{x=1+} = 1 \right)$

a $k'_-(1) = -1$ $\left(= (-\ln x)'\big|_{x=1-} = -1 \right)$

v $(0,+\infty)$ je $k(x) = |\ln(x)|$

(poznámka se opět „hodí" pro „levé" derivace")

5) „Dokažte limity z definice"

a) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$: ? $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x:\ 0<|x-3|<\delta \Rightarrow |2x-1-5|<\varepsilon$

(zde bude i pro $|x-3|$ platit $\Rightarrow$ (díky spojitosti fce v bodě $x=3$)

lib. $\varepsilon>0$ (zvolme) má-li být $|2x-1-5|<\varepsilon$, je třeba $|2x-6|<\varepsilon$, tj. $2|x-3|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ stačí vzít $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ (nebo přímo $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$)

(a pak (ověření) ; je-li $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$, je $2|x-3|<\varepsilon$ a tedy $|2x-6|<\varepsilon$ cbd.)

b) ? $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty \iff$? $\forall K(>0)\ \exists\delta>0\ \forall x:\ 0<x<\delta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}>K$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}}>K \\ \text{a } K>0! \end{array}\right.$ $\Rightarrow \frac{1}{x}>K^2 \Rightarrow 0<x<\frac{1}{K^2}=\delta$? (ani ano)

(stačí)

a ověření (mělo by se udělat, ale zpravidla už se „nedělá"):

tedy ke zvolenému $K>0$ „vyrobíme" $\delta=\frac{1}{K^2}$, pak,

je-li $0<x<\delta=\frac{1}{K^2}$ je $\frac{1}{x}>K^2>0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}>K$ cbd.

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ – tuto limitu snadno „spočítáme" pomocí „strážníků" :

$$0 \le \left|x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \le |x| \ , \ \lim_{x\to 0}|x| = 0 \ \underset{\text{VOS}}{\Longrightarrow} \ \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$$

a stejné „myšlenky" využijeme i při důkazu „z definice" (podobné příklady byly i u posloupností a jejich limit)

Můžeme zde ukázat, že platí:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x: 0<|x|<\delta \Rightarrow \left|x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|<\varepsilon$$

– zvolme $\varepsilon>0$ – pak δ „najdeme" pro ta $|x|$!

Má-li být $\left|x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \le |x| < \varepsilon$, stačí vzít $\varepsilon=\delta$:

a ověření: Je-li $|x|<\delta=\varepsilon$, pak $\left|x\sin\frac{1}{x^2}\right| \le |x| < \varepsilon$ – cbd.

A odtud – je dobře vidět, že „věta o strážnících" jen zobecňuje tento trik – v důkazu je to „obecně" podáno !

nebo:

$$?\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin x = 0 \iff ?\ \forall\varepsilon>0\ \exists k\ \forall x>k: \left|\frac{1}{x^2}\sin x\right|<\varepsilon$$

(stačí $k>0$):

a opět: má-li být $\left|\frac{1}{x^2}\sin x\right| \le \frac{1}{x^2} < \varepsilon$, pak „stačí" $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$

a tedy $k=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ –

ověření: Je-li $k=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, pak pro $x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}>0$ je $x^2>\frac{1}{\varepsilon}>0$

a tedy $\frac{1}{x^2}<\varepsilon$,

a tedy i $\left|\frac{1}{x^2}\sin x\right| \le \frac{1}{x^2} < \varepsilon$, cbd.

6. Ukažte, že neexistují limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} \,\text{"}=\text{"}\, \frac{1}{0+} \,\text{"}=\text{"}\, +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty$

tedy jednostranné limity jsou různé v bodě 0, tedy oboustranná limita nemůže existovat;

b) $$\lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x^2} \sin x = \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \,\text{"}=\, \pm\infty \cdot 1\text{"} = \pm\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \sin x \text{ neexistuje ;}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje, neboť:

zvolíme-li x_n tak, že ($n\in N$) $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} = n\pi \Leftrightarrow$

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$$

a tedy $f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0$ pro $n\to\infty$

a dále zvolme třeba $\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ $\left(\frac{1}{\tilde{x}_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n\in N\right)$,

pak $f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1 \longrightarrow 1$ pro $n\to\infty$

Tedy (Heineho definice limity funkce) máme dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{\tilde{x}_n\}$, $\lim x_n = \lim \tilde{x}_n = 0$, ale $0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim f(\tilde{x}_n) = 1 \Rightarrow$ fce f nemá limitu pro $x\to 0$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x(1+\sin x)$ neexistuje, neboť opět „snadno" najdeme dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{\tilde{x}_n\}$ takové, aby

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n)$:

$x_n = n\pi$, $n\in\mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (n\pi) = \infty$ $\quad(\sin(n\pi)=0)$

$\tilde{x}_n = -\frac{\pi}{2}+2n\pi$, pak $\lim f(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ $\quad\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = -1\right)$

a jsme hotovi – opět používáme Heineho definici limity fce.

Ale třeba už $\lim\limits_{x\to\infty} x(2+\sin x) = +\infty$, neboť

$2+\sin x \geq 1$ a tedy $x(2+\sin x) \geq x$ pro $x>0$ (stačí)

$\underset{VOS}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x(2+\sin x) = +\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$)

<u>A nyní slíbené řešení příkladu 1* (nemusíte číst):</u>

1*a) ? platí: $\sum_1^\infty a_n$ konverguje, $a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_1^\infty a_{k_n}$ konverguje

$(k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots)$ – <u>platí, neboť</u>:

označme $\{s_N\}$, resp. $\{\sigma_N\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_1^\infty a_n$, resp. $\sum_1^\infty a_{k_n}$; pak posloupnost $\{\sigma_N\}$ je

(i) neklesající (neboť $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

(ii) shora omezená (neboť $\sigma_N \leq s_{k_N}$ pro všechna N, a díky konvergenci $\sum_1^\infty a_n$ je $\{s_n\}$ omezená, tj. omezená shora, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ existuje vlastní $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N$, tj. $\sum_1^\infty a_{k_n}$ je konvergentní

(užije se věta o limitě monotónní posloupnosti)

b) $\sum_1^\infty a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n^2$ konverguje :

„Podle" kolegy Haldy:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall \varepsilon (<1)\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_n|^2 = a_n^2 < |a_n|$, a tedy,

je-liže $\sum |a_n|$ konverguje , pak $\sum a_n^2$ konverguje (*)

(„t.zv. srovnávací kritérium – dokázali jsme si"),

což (*) platí, ledaže $a_n \geq 0$ (pak $|a_n| = a_n$)

Tedy jistě platí: $a_n \geq 0$, $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n^2$ konverguje

Obecně ale tvrzení neplatí:

$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je řada konvergentní, ale $\sum_1^\infty \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum \frac{1}{n}$

diverguje (harmonická řada)

1) A omlouvám se za zadání příkladu 1b), myslela jsem si, že budete probírat i t.zv. alternující řady, tj. $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$; tam pak platí (t.zv. Leibnizovo kritérium):

Je-li $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n$, kde $a_n > 0$, $\{a_n\}$ klesající posloupnost, a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n \text{ konverguje} -$$

a dle tohoto kritéria dokážeme snadno, že konverguje

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} ;\quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0, \quad a_n \searrow 0 ,$$

2) a $\sum_1^\infty a_n$, pro kterou $\sum |a_n|$ je konvergentní, také konverguje (nazývá se tato absolutní konvergence řady)

1c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergují $\Rightarrow$ $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n b_n|$ konverguje

– platí, neboť:

kdyžaž použijeme snadné nerovnosti:

$\forall a,b \in R$ platí: $|ab| \leqq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ $(\leqq a^2+b^2)$

(plyne odtud, že $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \geqq 0$)

A pak se opět užije „srovnávací kritérium" konvergence řad:

1) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n^2$ konverguje, $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum\limits_{1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ konv.

2) $|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$ $\forall n \in N$, $\sum (a_n^2+b_n^2)$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n b_n|$ konverguje (a tedy i dle poznámky ke známého příkladu o absolutní konvergenci i $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje)